Домашнее задание 9 и 10: попарно-независимые случайные величины, неравенство Чебышёва, оценки Чернова, целочисленное линейное программирование

1. (1) Покажите, что если NP $\subset$ BPP, то NP $=$ RP.

2. (1) Пусть n — простое, $a_1, a_2, ..., a_k$ — выбраны равномерно и независимо из $\mathbb{Z}_n$. Пусть $Y_i \equiv a_1 + a_2 i + a_3 i^2 + ... + a_k i^{k-1} \mod n$. Покажите, что при $i_1, i_2, ..., i_k : i_h \not\equiv i_j \mod n$ случайные величины $Y_{i_1}, Y_{i_2}, ..., Y_{i_k}$ являются k-независимыми.

3. (1) Пусть L это язык из класса BPP. Пусть A — соответствующий вероятностный алгоритм, который ошибается с вероятностью меньшей $\frac{1}{3}$. Используя оценки Чернова оцените, сколько раз достаточно запустить алгоритм A, чтобы вероятность ошибки стала экспоненциально маленькой.

4. (1) Дана матрица A размера $n \times n$ при этом $A_{ij} \in \{0, 1\}$. Предъявите алгоритм, который находит с вероятностью $1 - \frac{2}{n}$ вектор u состоящий из 1 и -1, такой что $||Au||_\infty \le O(\sqrt{n \ln n})$.

5. (1) В задаче Set Cover дано семейство $\mathcal{S}$ подмножеств множества U и требуется выбрать минимальное количество подмножеств из $\mathcal{S}$, которые покрывают все U. Задача f-Set Cover — это частный случай задачи Set Cover, только заранее известно, что любой элемент встречается не более чем в f подножествах из $\mathcal{S}$. У вас есть волшебная машина которая умеет быстро составлять и решать задачи линейного программирования. Используя эту волшебную машину постройте f-приближение для задачи f-Set Cover. Просто жадный алгоритм в качестве решения **не принимается**.